

正态随机变量的函数的独立性探讨

鲜思东, 尹龙军, 王琼, 胡爽, 于南翔, 刘勇

重庆邮电大学数学与统计学院, 重庆, 中国

【摘要】独立性是概率论中一个重要的概念, 判定两个随机变量的独立性对数据的统计分析至关重要。然而对于两个非独立的正态随机变量的函数是否仍是正态变量, 不同的文献和AI大模型给出了不同的结论。本文对此进行了分析和研究, 通过实际的例子, 证明了两个正态随机变量的函数不一定是正态变量, 从而表明了: 当相关系数为0时, 不能判定两个正态变量的函数的独立性。

【关键词】正态分布; 高维正态分布; 边缘分布; 独立性; 相关系数

【基金项目】重庆市研究生教育教学改革研究重大项目(yjg250115); 重庆市高等教育教学改革研究项目(243122); 重庆邮电大学教育教学改革项目(XJG24236); 重庆邮电大学“人工智能+”重点建设课程项目(xrgznkc2025-19)。

1. 引言

随机变量之间独立性的假设可以大大的简化联合分布的计算。多个相互独立的随机变量的联合分布可以直接表示为它们边缘分布的乘积, 这在似然估计中可以简化似然函数。此外, 独立性假设也是众多统计方法(如回归分析、方差分析、主成分分析等)的核心假设。

正态分布是日常生活中最常见的分布之一, 研究正态变量之间的独立性, 有助于理解更一般随机变量的性质。二维正态分布及其相关性质是概率论中的重要知识点, 其相关的性质和结论可以直接推广到高维的正态分布中。当前的课程教学中, 相关的结论和定理主要针对联合分布为正态分布或者相互独立的随机变量进行了阐述。而对于非独立的正态变量没有明确的结论, 因而, 在教学过程中, 出现了结论不统一的情况。例1是来自文献2的配套教学课件中的一个典型例题, 该例题也在其他文献中被使用[1], 然而, 针对该例题中的问题(3), 不同的文献给出了不同的结论。

例1 已知随机变量 X 和 Y 分别服从 $X, N(0, 4^2)$, $\rho_{XY} = \frac{-1}{2}$, 设 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$ 。

(1) 求 Z 的数学期望和方差。

(2) 求 X 和 Z 的相关系数。

(3) 问 X 和 Z 是否相互独立? 为什么?

1.1 《概率论与数理统计(第五版)》配套课件解答

解: (1) 由

$$E(X) = 1, D(X) = 9, E(Y) = 0, D(Y) = 16.$$

$$\begin{aligned} \text{得: } E(Z) &= E\left(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{3}E(X) + \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{3} \\ D(Z) &= D\left(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + 2\text{Cov}\left(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}\right) = 3 \\ (2) \text{Cov}(X, Z) &= \text{Cov}\left(X, \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}\text{Cov}(X, X) + \frac{1}{2}\text{Cov}(X, Y) \\ &= \frac{1}{3}D(X) + \frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 0 \end{aligned}$$

故 $\rho_{XZ} = 0$

(3) 由二维正态随机变量相关系数为零和相互独立两者是等价的结论, 可知: X 和 Z 是相互独立的。

1.2 文献[1]的解答

文献[1]中(P551, 例3.27)也给出了该题目的解答。对于第(1)和(2)问, 解答结果完全相同, 但对于第(3)问, 该文献给出了不同的结论, 详细如下:

“因 Z 不一定服从正态分布, (X, Z) 更不一定服从正态分布, 故尽管 X 和 Z 不相关, X 和 Z 仍不一定相互独立。”

随着人工智能的广泛应用, 大模型可以为教学提供更多的便利, 可以为我们解答题目提供更多的细节。然而, 对于例1中的问题(3), 不同的AI大模型也给出了不同的解答。

1.3 大模型 Kimi 的解答

将问题输入 Kimi, 得到例1问题(3)

的解答如下:

“由于 X 和 Z 的相关系数 $\rho_{XZ} = 0$, 这表明 X 和 Z 是不相关的。然而, 不相关并不意味着独立。独立性需要 X 和 Z 的联合分布等于它们边缘分布的乘积, 这通常需要更复杂的检验或直接的分布信息。在一般情况下, 我们不能仅凭不相关就断定它们独立。因此, 虽然 X 和 Z 不相关, 但我们不能断定它们是独立的。”

1.4 大模型 Deepseek 的解答

将问题输入 Deepseek, 得到例 1 问题 (3) 的解答如下:

“对于联合正态分布的随机变量, 不相关等价于独立。这是因为联合正态分布的概率密度函数完全由均值向量和协方差矩阵决定。如果协方差为 0, 则联合密度函数可以分解为边缘密度函数的乘积, 即 X 和 Z 独立。

虽然题目中没有直接给出 (X, Y) 是联合正态的, 但通常在实际问题中, 给定边缘正态分布和相关系数, 可以假设联合正态性。在这种情况下:

(X, Y) 的联合分布是二维正态分布。
 $Cov(X, Y) = 0$ 意味着 $\rho_{XZ} = 0$ 。因此, X 和 Z 独立。

如果 (X, Y) 不是联合正态的, 则不相关不一定推出独立。但题目通常隐含联合正态的假设。

X 和 Z 是相互独立的, 因为 (X, Z) 服从联合正态分布且它们的协方差为 0 (即不相关)。”

1.5 大模型 ChatGpt 的解答

将问题输入 ChatGpt, 得到例 1 问题 (3) 的解答如下:

“ X 和 Z 的协方差为 0。因为 X, Z 是二元正态分布的变量, 协方差为 0 意味着它们彼此不相关。对于正态分布的变量, 不相关性即意味着线性无关和相互独立。所以, X 和 Z 是相互独立的。”

以上五个解答中, 其中 3 个解答认为是 X 和 Z 是相互独立的, 2 个解答认为是不能判断 X 和 Z 是否独立。分析可以看出, 两种不同解答的主要分歧在于: (X, Z) 的联合分布是否服从二维正态分布? 如果 (X, Z) 是服从二维正态分布的, 那么 X 和 Z 就是相互独立的, 否则, 就不能判断 X 和 Z 是否相互独立。接下来, 我们将针对该问题展开探讨。

2. 相关的基础理论

本节给出一些有关正态分布的相关定义和性质。

定义 1[4][5] (一维正态分布) 设 X 是连续型随机变量, 其概率密度函数为:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$$

其中, 参数 $\mu, \sigma (\sigma > 0)$ 为常数, 则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布或高斯分布, 记作 $N(\mu, \sigma^2)$ 。

定义 2[2][4] (二维正态分布) 二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 是常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$ 。称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布。

定义 3[2] (n 维正态分布) 若 n 维随机变量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的联合概率密度函数为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det C)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \mu)^T C^{-1} (X - \mu) \right\}$$

则称 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 维正态分布, 其中 C 是随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的协方差矩阵, $\det C$ 为 C 的行列式值。

n 维正态分布具有如下重要性质:

性质 1[2][6]. 若随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 维正态分布, 则它的每一个分量 $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ 分别是一维正态随机变量; 反之, 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是一组相互独立的随机变量, 且服从一维正态分布, 则 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的联合分布服从 n 维正态分布。

性质 2[2][6]. n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的任意线性组合 $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ 服从一维正态分布 (其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为不全为零的实数)。

性质 3[2][6]. 若 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 n 维正态随机变量, $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 分别是 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的线性函数, 则 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ 的联合分布是 n 维正态分布。

性质 4[2][7]. 若 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 n 维正态随机变量, 则命题“ $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立”等价于命题“ $X_1, X_2, \dots, X_n$ 两两不相关”。

3. 正态变量独立性判定

由性质 1 可知, n 维正态分布的边缘分布是 n 个一维正态分布。那么反过来, n 个边缘

分布是正态分布的一维正态分布的随机变量，它们的联合分布是否 n 维正态分布呢？由性质4可知，如果这 n 个一维正态变量是相互独立（或两两不相关）时，则它们的联合分布是 n 维正态分布。那么，如果这 n 个一维正态变量不是相互独立时，它们的联合分布是否为正态分布呢？接下来，通过一个例子来对此进行说明。

例2 令 (X, Y) 的联合概率密度为：

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 + \sin x \sin y) \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

判定 X 和 Y 是否相互独立？

解：先分别计算 X 和 Y 的边缘概率密度如下：

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} (1 + \sin x \sin y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \sin x \sin y dy \right). \end{aligned}$$

$$\text{由标准正态分布可得：} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1.$$

由于 $\sin y$ 是奇函数，因此：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \sin x \sin y dy = 0.$$

$$\text{所以，} f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

同理可得： $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ ，因此 X 和 Y 的边缘分布都是标准正态分布 $N(0, 1)$ 。

显然： $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$ ，因此 X 和 Y 不是相互独立的。

接下来计算 X 和 Y 的相关系数。

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 + \sin x \sin y) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sin x \sin y dx dy. \end{aligned}$$

对于第一项积分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy, \text{ 考虑两个独立随机变量 } X_I \text{ 和 } Y_I \text{ 的, 其中 } X_I \sim N(0, 1), Y_I \sim N(0, 1).$$

$$\text{则 } f(x_I, y_I) = e^{-\frac{x_I^2+y_I^2}{2}}.$$

$$\text{因此：} E(X_I Y_I) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_I y_I e^{-\frac{x_I^2+y_I^2}{2}} dx_I dy_I, \text{ 由于 } X_I \text{ 和 } Y_I \text{ 独立, 所以有: } E(X_I Y_I) = E(X_I)E(Y_I) = 0.$$

对于第二项积分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sin x \sin y dx dy, \text{ 可以分离变量:}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} \sin x dx \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}} \sin y dy.$$

$$\text{其中 } \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} \sin x dx = -$$

$$\sin x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos x dx = 0 +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos x dx.$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos x dx$ 在实数范围内没有解析表达式，令 $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ ，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos x dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + ix} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - ix} dx \right) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + ix} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-i)^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{同理：} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - ix} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{因此：} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} \sin x dx = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{综上可得：} E(XY) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}} = e^{-1}. \\ X \text{ 和 } Y \text{ 的协方差 } Cov(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = e^{-1}. \\ X \text{ 和 } Y \text{ 的相关系数：} \rho_{XY} &= e^{-1} \end{aligned}$$

由例2可以得到如下结论：

定理1 n 个不是相互独立的一维正态随机变量的联合分布不一定是正态分布。

因此 Deepseek 给出的答案中“虽然题目中没有直接给出 (X, Y) 是联合正态的，但通常在实际问题中，给定边缘正态分布和相关系数，可以假设联合正态性。”的结论是不成立的。

进一步，考察 n 个正态变量的线性组合是否是正态分布。

根据性质1可知： n 个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然是正态变量。若它们不是相互独立的呢，此时它们的线性组合是

否还是服从正态分布呢? 接下来, 我们通过一个例子来进行说明。

例3 (续例2) 在例2中, 设 $Z = X + Y$, 计算 Z 的概率密度函数。

解: 由于 $I = f_{X+Y}(z) =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(z-y)^2+y^2}{2}} (1 + \sin(z-y) \sin y) dy$$

又因为: $(z-y)^2 + y^2 = z^2 - 2zy + 2y^2$, 所以有:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy-y^2} (1 + \sin(z-y) \sin y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy-y^2} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy-y^2} \sin(z-y) \sin y dy \right). \end{aligned}$$

对于括号内第一部分积分, 可得:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-\frac{z}{2})^2 + \frac{z^2}{4}} dy = \\ &e^{\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-\frac{z}{2})^2} dy = e^{\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

对于括号内第二部分积分, 可得:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy-y^2} \sin(z-y) \sin y dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy-y^2} \frac{1}{2} (\cos(z-2y) - \cos z) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy-y^2} \cos(z-2y) dy - \cos z \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy-y^2} dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy-y^2} \cos(z-2y) dy - \cos z \cdot e^{\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} \right). \end{aligned}$$

由于 $\cos(z-2y) = \operatorname{Re}(e^{i(z-2y)})$, 所以

$$\begin{aligned} I_2' &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy-y^2} \cos(z-2y) dy = \\ &\operatorname{Re} \left(e^{iz} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy-y^2-2iy} dy \right). \end{aligned}$$

计算 I_2' 中的积分, 可得:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy-y^2-2iy} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2+(z-2i)y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-\frac{z-2i}{2})^2 + \frac{(z-2i)^2}{4}} dy \\ &= e^{\frac{(z-2i)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-\frac{z-2i}{2})^2} dy = \\ &e^{\frac{(z-2i)^2}{4}} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(e^{iz} \cdot e^{\frac{(z-2i)^2}{4}} \sqrt{\pi} \right) &= \operatorname{Re} (e^{iz} \cdot \\ &e^{\frac{z^2}{4}-iz-l} \sqrt{\pi}) = \operatorname{Re} \left(e^{\frac{z^2}{4}-l} \sqrt{\pi} \right) = e^{\frac{z^2}{4}-l} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

带入可得:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} (e^{\frac{z^2}{4}-l} \sqrt{\pi} - \cos z \cdot e^{\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi}) = \\ &\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{z^2}{4}} (e^{-l} - \cos z). \end{aligned}$$

合并 I_1 和 I_2 , 可得:

$$\begin{aligned} I &= f_{X+Y}(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \left(e^{\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} + \right. \\ &\left. \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{z^2}{4}} (e^{-l} - \cos z) \right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \left(1 + \frac{e^{-l}-\cos z}{2} \right). \end{aligned}$$

综上可知, $Z = X + Y$ 不是正态变量。

由例3可知: 两个不独立的正态变量的线性组合不一定是正态变量。因此, 可以得到如下结论:

定理2 n 个不相互独立的正态变量的线性组合不一定是正态变量。

综上可知, 在例1中, 虽然 X 和 Y 服从正态分布, 但由于 X 和 Y 不独立, 因此 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$ 不一定服从正态分布, 因此 Z 不一定是正态变量。虽然 X 和 Z 的相关系数 $\rho_{XZ} = 0$, 但由于不能确定 Z 一定是正态变量, 所以不能判定 X 和 Z 一定相互独立。

4.结论

随着人工智能的发展和广泛应用, 许多的模型是在独立性的前提下建立的, 了解和掌握数据之间的联系是十分重要的。本文通过对正态变量之间的独立性判定的辨析, 不仅可以让学生更加升入的理解课程知识点, 还可以让学生学会对问题进行深入的思考, 对不同来源的信息进行判断。在人工智能广泛应用的背景下, 很多问题可以通过人工智能得到答案, 这可能让学生失去自主思考的能动性。本文引入不同的人工智能来对问题解答, 可以让学生认识到, 人工智能可以为我们提供便利, 但也不是万能的, 也可能出现错误。只有保持主动思考的能力, 才能对复杂的信息做出正确的判断, 才能更合理的使用人工智能辅助学习, 提升学习效率。

说明: 本文部分计算和证明过程参考了大模型。

参考文献

- [1] 陈文灯/黄先开, 曹显兵, 数学复习指南 (2005版) [M].2004, 世界图书出版公司北京公司.
- [2] 盛骤, 谢千式, 潘承毅. 概率论与数理统计 (第五版) [M].北京: 高等教育出版社, 2019.12.(P79)

- [3] 赵小艳, 李继成, 段启宏. 随机变量独立性与不相关的一点教学思考[J]. 大学数学, 2020, 36(1): 64-68.
- [4] 邹云蕾. 二维正态随机变量的线性组合的独立性[J]. 教育教学论坛, 2020(15): 279-280.
- [5] 翁桂英, 宋国富. “国标”背景下的概率统计课程教学改革探讨[J]. 红河学院学报, 2019, 17(4): 131-135.
- [6] 概率论与数理统计--第四章 随机变量的数字特征(4.3-4.4), <https://www.docin.com/p-106213623.html>
- [7] 李春娟. “辨误”在概率论教学中的应用[J]. 丽水学院学报, 2013, 35(05): 85-87.