

## 高等数学古今案例教学法探索

王成<sup>1</sup>, 王义康<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> 中国计量大学应用数学系, 浙江杭州, 中国

<sup>2</sup> 中国计量大学数据科学技术系, 浙江杭州, 中国

\*通讯作者

**【摘要】**针对大学生学习高等数学时存在的轻视态度、概念抽象导致畏难情绪以及过度依赖人工智能工具等问题, 提出一种结合古典案例与现代案例的教学方法。该方法在导数、极限、微分方程等关键知识点中, 引入知识背景作为古典案例, 激发学生兴趣; 同时运用数学建模思想解决与时俱进的实际问题, 作为现代案例, 培养学生学以致用能力。通过“导数概念”一节的完整教学设计与实施过程, 展示了该方法的可行性与有效性。实践表明, 古今案例对照教学能够疏通知识来龙去脉, 提升学习自主性, 厚植家国情怀, 并为理工科数学教学改革提供可复制路径。

**【关键词】**高等数学; 导数; 教学方法; 古今案例; 数学建模

**【基金项目】**2025 浙江省本科教学改革项目“人工智能赋能本科数学公共课教学创新提质的探索与实践”(编号: JGCG2025136)

### 1. 研究背景

笔者从事多年高等数学教学, 发现如今大学生学习高等数学面临如下状况和困境。

首先, 部分同学错误地以为高等数学和中学所学差不多, 都是函数、计算之类的, 于是掉以轻心, 思想上不够重视。他们认为靠着中学的底子, 对付考试没有问题, 不肯下功夫, 缺乏进一步学习和探究知识的态度和精神。

其次, 高等数学中的很多概念较为抽象, 计算比较繁琐。极限概念的出现, 标志着高等数学与中学数学发生了理论深度的根本性飞跃, 需要思维方式的改变, 而长久以来的中学思维方式转变并不容易。这些特点给同学们带来了学习障碍和瓶颈, 给教学带来了挑战。

再次, 人工智能大模型的横空出世, 使很多同学过分依赖于此。作业遇到不会的, 甚至没有思考就直接搜索答案应付提交, 这些状况极大影响了学习效果, 还养成了不良习惯。

鉴于以上各种原因, 大学数学课程的教学面临诸多挑战。许多教育工作者提出了解决与改进方案。卢爱红等[1]研究了运用问题驱动模式进行教学, 以此提升学生探究欲望、问题解决和知识迁移能力; 孙敏等[2]探索在高等数学作业环节融入思政元素, 包括审美素养、责任心、诚信等品质, 以增加课程内容的趣味性; 徐永等[3]从教学质量目标、教学设计、师生互动、教学资源、教学工具等多个维度, 构建了系统的高等数学智慧课堂教学模式, 显著提升

了学生的课程参与度, 进而促进了学生的深度学习能力; 闫熙[4]探讨了以人工智能赋能高等数学教学实践, 优化学习体验、提高效率, 推动数学教学的智能化、个性化和实用性; 闫艳花等[5]提出“数学建模+工业场景”双驱动模式, 激发学生的学习动能和潜能, 力求为智能制造行业输送高素质人才。朱珠[6]从模块化分层教学、跨学科内容融合、问题导向学习(PBL)、智能化教学平台四个方面给出了具体的教学创新策略, 强调通过情境创设与价值感知来提升学生的学习动力; 上海交通大学[7]基于知识图谱实现三轮思维导图法的 AI 评价功能(准确率达 90%以上)、构建“AI 诊断—同伴互鉴—反思内化”双轨评价体系、以及开发智能评价系统与数学学习助手。试点覆盖 25%选课学生, 实现了从“结果导向”向“过程赋能”的教学范式转型; 李建涛[8]开展了以“真实问题驱动、信息技术赋能、课程思政有机融入”为核心的教学改革实践。多个创新案例: 用微信/抖音好友推荐算法讲解矩阵乘法, 用数字华容道游戏讲解行列式中的逆序数概念, 利用 GeoGebra 动态数学软件实现积分思想的可视化教学, 有效突破学生的思维难点; 何永明等[9]探讨了课程思政背景下高等数学教学模式的建设路径, 从教师能力提升、思政元素挖掘、教学模式创新及课间交流四个维度展开研究; 潘建丹等[10]聚焦 AI 驱动高等数学课程智慧化重构, 直面“大班教学难关注个体、统一进

度难适配差异、AI 依赖弱化思维、评价机制难显增值”四大核心困境，构建了“师—生—AI 三元协同”模式与知识图谱技术应用体系，提升教学效率。这些方法给广大高等数学教师以广泛的启发，促使教研工作者开动脑筋，采用一些能激发学生兴趣的教学方法。

笔者拟采用的教学方法是在高等数学教学中融入数学建模思想与案例。对关键知识点，将古今中外案例相结合，疏通知识的来龙去脉，以期达成如下效果：提升学习兴趣，让学生发自内心地想学；培养数学建模能力、学以致用意识和工匠精神；了解古今中外的科学思想，厚植家国情怀，学习众家之长，为祖国发展贡献力量。

高等数学中有很多内容可以结合数学建模案例进行教学。下面以高等数学中最重要的知识点之一“导数的概念”为例，阐释具体的实施过程。

## 2. 教学方法具体实施（以导数概念为例）

将按如下流程展开教学过程。

### 2.1 兴趣激发（古诗词开场）

以李白诗句“千里江陵一日还，两岸猿声啼不住，轻舟已过万重山”[11]中所蕴含的平均速度和瞬时速度来引出新课，让学生耳目一新、精神一振。

“千里江陵一日还”包含总路程“千里”和总时间“一日”，故可求出平均速度；而下一句中，猿声还在耳畔，这一瞬间，小船已过万重山，这里体现了瞬间速度，让同学们体会速度一般不会是均匀的，每时每刻都在变化。那么如何刻画每个瞬间的速度就成了一个无法回避的自然问题，让人无法满足平均速度的概念，无法停下继续探寻真理的脚步。

### 2.2 概念的历史背景（古典案例）

微积分发明人牛顿为研究天体运行的瞬时速度问题，引进了流数术（即现在所说的导数）。计算路程关于时间的变化率，给时间一个小的变化，用路程变化与时间变化的比值的极限来刻画瞬时速度。

牛顿所身处的，是一个用数学重新认识宇宙的时代。他计算天体和物体的速度，并非为了解决孤立的工程问题，而是为了完成科学革命的终极命题：用单一的数学力学体系（经典力学）揭示整个物理宇宙的运行机制。微积分

正是他为完成这一宏伟蓝图而锻造的、不可或缺的数学武器[12]。

### 2.3 引出导数定义式

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

几何意义：函数在某点的导数刻画了该点的陡峭程度；物理意义：路程对时间求导即为瞬时速度（在后面案例中要用到）。

### 2.4 融入数学建模（现代案例）

微积分在航空航天领域应用广泛，这里用飞机降落时的速度和轨迹设计问题来培养数学建模思想和学以致用的意识。

与同学们一起探讨现代案例的建模过程和解决方案是教学重点。

问题提出：距地面高度为  $H$ 、速度为  $v$  的飞机开始向机场降落，离降落点水平距离为  $L$ ，且降落过程中竖直速度大小不超过某个阈值  $m$ 。试确定降落曲线方程以及  $L$  的范围。

驱动思考：先让同学们考虑，理清思路，如何数学化，即建立与问题匹配的数学模型。已知什么信息，要求的是什么，建立什么模型，怎么求解，才能解决实际航空需要的问题。因为大家刚开始接触数学模型，可以做一些提示，比如先建立好坐标系，大胆做一些假设和尝试，把问题简化等。

建模过程：建立适当坐标系，设飞机轨迹曲线为

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2)$$

由飞机的开始降落位置、落点及速度方向确定系数。对竖直速度的要求应用不等式来刻画，而速度用导数来表达，因此模型为

$$\left| \frac{dy}{dt} \right|_{\max} \leq m. \quad (3)$$

模型求解：以落点为坐标原点，注意两个端点的位置，可得

$$y \Big|_{x=-L} = H, \quad y \Big|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

又注意到起止点的速度方向水平，因此导数为 0，即

$$y' \Big|_{x=-L} = 0, \quad y' \Big|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

由以上条件，可求得降落曲线方程为

$$y = H \left[ 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

下面则需要确定  $L$  的范围，使得竖直速度满足安全性要求。

首先，

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{H}{L} \left[ 6 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 6 \left( \frac{x}{L} \right) \right] \cdot v = \frac{6Hv}{L} \cdot \frac{x^2 + Lx}{L^2}. \quad (7)$$

$$\text{由 } \left| \frac{dy}{dt} \right|_{\max} = \frac{3Hv}{2L} \leq m, \text{ 解得 } L \geq \frac{3Hv}{2m} \quad (8)$$

即飞机至少在离机场 $\frac{3Hv}{2m}$ 处开始降落。

至此，现代案例已用数学建模的方法解决，希望同学们能学到其中的整体逻辑、建模思路和细致的求解过程。

### 3.问题反思，提升认知

这部分教学设计包含古今中外的思想文化和实践案例。从李白诗词中感受到中华文化的浪漫诗意及敏锐的直觉体悟，感受到天人合一、人与自然的交融和美的享受；而从牛顿的分析中看到西方对逻辑演绎和数学计算的兴趣，其哲学基础是物我二元对立，对物质世界的解剖和挖掘。

我们在维持自身文化特质的基础上，学会采用西方的某些思维方法进行科学探究。要大胆假设、勤于计算，对事物持之以恒地进行精微的分析，为我国科技发展贡献力量。

### 4.总结

在高等数学中，有很多知识点可以采用上述古今案例相结合的教学设计。

例如在极限的概念中，中国古代的割圆术以及庄子“一尺之棰，日取其半，万世不竭”等论述都是很好的古典案例，而现代金融中的复利贷款本息计算则是现代案例。

对函数连续性的概念，《墨经》中“穷，或有不容尺也”对连续与离散边界的思考，以及《九章算术》注中刘徽对“至细可微”的无限逼近过程的描述，都是很好的古典案例；而外国案例中，柯西给出严格的 $\epsilon - \delta$ 语言定义连续性，则彻底奠定了分析学的基础。

在导数的概念中，中国古代《九章算术》中“盈不足术”对变化趋势的逼近思想、刘徽割圆术中“以直代曲”的思想，以及祖暅对瞬时变化率的朴素认识，都是很好的古典案例；而外国案例中，牛顿与莱布尼茨通过研究运动速度与切线问题独立建立微积分，则是典型的近代突破。

泰勒公式的概念中，中国古代历法计算中对天体运动轨道采用逐次逼近（如使用高次内插法），以及刘徽割圆术中“内外夹逼”逐步提高圆周率精度所体现的函数局部近似思想，都是很好的古典案例；而外国案例中，泰勒本人于1715年提出的将函数在一点展开为幂级数的公式，以及后续拉格朗日给出的余项表达，则是现代科学与工程中数值逼近的理论核心。

对应多元函数偏导数的概念，中国古代建筑中通过控制不同方向的坡度与应力（如房屋梁架在进深与面阔方向的不同斜率变化），以

及《天工开物》中在分析多种原料配比对产出质量的影响时对单一变量变化的依赖经验，都是很好的古典案例；而外国案例中，欧拉与拉格朗日在对多元函数求导时系统引入偏导数符号 $\frac{\partial f}{\partial x}$ ，并将其应用于流体力学与热传导方程的建模，则是现代物理与工程中的基本工具。

积分的概念中，中国古代的“圭表测影”求曲边图形面积、刘徽在《九章算术注》中的“积微成面”思想，以及祖暅原理（“幂势既同，则积不容异”）对体积的穷竭分割，都是很好的古典案例；而外国案例中，阿基米德用穷竭法求抛物线弓形面积，则是积分思想的西方早期典范。

级数的概念中，中国古代《庄子·天下》中“一尺之棰，日取其半，万世不竭”对无穷等比数列求和的直观表述，以及《易经》中阴阳二分、八卦衍生的递推展开思想，都是很好的古典案例；而外国案例中，傅里叶将周期函数展开为三角级数（傅里叶级数），则彻底改变了信号分析与数学物理方法。泰勒级数则用多项式来逼近任意可导函数，在工程应用和近似计算中起到了不可限量的作用。

关于极值和优化，我国古代营城建都中对“城郭大小、粮草运输”的经济优化设计，都是很好的古典案例；而外国案例中，拉格朗日乘数法作为求解条件极值的有力工具，则是现代优化的核心方法之一。

在微分方程中，最速降线问题是古典案例，“嫦娥奔月”“天问一号”等航天工程则是现代案例，其运行轨迹的设计计算离不开微分方程。

只要数学教学工作者注意搜集与挑选，就可以找到很多有趣而实用的案例。让我们一起激发学生的兴趣，培养学生解决问题的实践能力，为祖国民族复兴贡献微薄之力。

### 参考文献

- [1] 卢爱红, 金立芸. 基于问题驱动教学模式的高等数学教学策略分析[J]. 陕西青年, 2026(03): 163-165.
- [2] 孙敏, 施秋红. 高等数学课程作业环节中课程思政教学的探索与思考[J]. 大学数学, 2026, 42(01): 41-44.
- [3] 徐永, 刘敏. 以深度学习为导向的高等数学智慧课堂教学实践[J]. 信息与电脑, 2026, 38(06): 183-187.
- [4] 闫熙. AI 赋能高职院校高等数学课程标准化教学改革研究实践——以“定积分的概

- 念”为例[J].标准生活, 2026(02): 96-98.
- [5] 闫艳花, 孟宪杰. AI 赋能下职业教育智能制造专业高等数学课程重构——以“数学建模+工业场景”双驱动教学为例[J]. 现代职业教育, 2026(03): 165-168.
- [6] 朱珠. 新时期高校高等数学课堂的教学创新[N]. 安徽科技报, 2025-05-30.
- [7] 上海交通大学《高等数学》AI 课程建设团队. 当数学符号与智能算法共振: 教育范式的重构[EB/OL]. 上海交通大学学术新闻网, 2025-05-21.
- [8] 李建涛. 以“真实问题”为驱动, 融“信息手段”于课堂——大学数学课程教学创新案例[EB/OL]. 辽宁大学本科教学质量监控中心, 2025-11-27.
- [9] 何永明, 于晟伟, 付亚坤, 等. 课程思政背景下高等数学教学模式的建设探索[J]. 人文与社会科学学刊, 2025, 1(3): 21-26.
- [10] 潘建丹, 邱小丽. 人工智能赋能高等数学课程智慧化重构的探索与实践[C]//温州商学院通识教育学院. 教学沙龙论文集. 温州: 温州商学院, 2025.
- [11] 蕲塘退士(选), 金性尧(注). 唐诗三百首[M]. 北京: 人民教育出版社, 2022.
- [12] Cohen, I.B. A Guide to Newton's Principia. In *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy* [M]. University of California Press, 1999.