社会科学与教育 2026年第5期
ISSN: 3079-4420

历史与现实的结合：对数概念教学策略探究

吕向花，杨军
新疆师范大学，新疆乌鲁木齐，中国

【摘要】历史使数学更接近人，心理学使人更接近数学。两者结合，可以更好地实现数学教育教学目标。对数概念是高中数学中比较重要的内容，在教学中存在着难点。因此，本文通过对对数产生和发展的相关历史的回顾，结合数学教育心理学的相关理论，对对数概念教学策略进行探讨，并提出了相应的两个策略：1.创设情境，理解对数思想。2.去情境化，对数概念及符号的生成。

【关键词】对数概念；教学；策略研究

1.问题提出

1972 年，在第二界国际数学教育大会（英国，埃克塞特）上，琼斯和英国学者罗杰斯组织数学史与数学教学关系国际研究小组（简称 HPM），标志着数学史和数学教育之间的关系作为一个学术领域的出现，HPM 致力于通过洞察人类发现和获取知识的规律，从历史中获取经验，从而将数学史与数学教育相融合。此后，数学史与数学教育越来越受到国内外学者的关注。在四年后的卡尔鲁斯厄，国际数学教育心理学组织（PME）成立，标志着数学教育心理学作为一门单独的科学而存在；PME 致力于将数学教育与心理学相结合，通过对学生认知规律和心理发展规律的探讨，促使数学教育更加符合学生的实际情况，从而达到更好的教育教学效果。1976 年 HPM 和 PME 均成为国际数学教育委员会（ICMI）的成员，两者都是为了实现更好的数学教育目标，只是两者侧重点有所不同。正如刘栢宏分析的那样，HPM 讨论的是如何让数学接近人；而 PME 讨论的是如何让人接近数学[1]。因此，两者结合有结合的可能性。另外，HPM 领域一个重要的理论基础即历史相似性理论，该理论认为学生知识的理解过程与历史发展的过程相似[2]。因此，我们可以通过数学史来判断学生在学习过程中可能出现的认知困难，从而帮助我们改进教学策略。但是，随着时代的变迁，现在的环境、文化等因素与历史已经有了很大差别，学生对知识的理解与历史发展有其相似性也会有所不同[3]。因此我们需要在 HPM 理论的基础上结合 PME 理论的视角，即数学教育心理学理论视角——通过了解生认知基础和心理发展规律来进行教育教学，来协调其相似性和不同之处[4]。

对数是人教版第四章指数函数与对数函数中第三节内容，它是继指数学习之后，又一新的运算。学习对数，一方面有助于简便运算，另一方面，又为对数函数和导数的学习起了铺垫的作用。虽然对数和指数对高中生来说都是一种新的运算，但是对对数的理解要难于对指数的理解，特别是对对数符号的理解。一方面，对数概念及运算不太符合学生思维和认知习惯，另一方面对数符号过于抽象，因此，如何进行对数的教学是一个难题。传统课堂通常以指数运算和对数运算互为逆运算为出发点，引出对数的概念及其运算性质。但在这一教学策略下，对数概念及其符号往往是一笔带过，学生也只是机械的记住了数学中有一种运算叫做对数，而不明白为什么要学习对数，对数的思想是什么以及为什么要用书本中的符号表示。但是传统课堂也有其优点，就是它明确了对数运算和指数运算的关系，并通过指数运算性质来推导对数运算法则，这是符合知识发生规律和学生的逻辑思维的。

如何改进传统课堂的不足之处，就需要回到历史的深处，探索对数的奥秘。而如何将历史和现实更好的结合，则需要遵循数学教育心理规律。因此，本文通过回顾对数的发现历史并结合 PME 理论视角，汲取传统课堂的优点，并在此基础上改进教学策略。

2.对数的历史回顾

M·克莱因曾经说过：“数学家花了几千年时间才理解无理数，而我们竟贸然给中学生讲戴德金分割。数学家花了三百年才理解复数，而我们竟马上就教给学生复数是一个有序实数对……。从古代埃及人和巴比伦人

开始直到韦达和笛卡儿，没有一个数学家能意识到字母可用来代表一类数，但现在却通过简单的集合思想马上产生了集合这个概念”[5]。关于对数的知识在教科书中不过几页纸的内容但翻开数学史可以看到对数的发现和发展也是经历了漫长的时间。

2.1 对数的思想根源

对数的思想可以追溯到公元前 3 世纪，古希腊数学家阿基米德在思考沙粒装满地球需要多少粒时，创立了一套独特的大数表示方式，即以万为基本单位的表示法。实际上他已经发现了这样两个数列即等差数列 1，2，3……和等比数列 10，100，1000……具有某种对应关系——等比数列的两项乘积，可以用加法来运算。比如 10×100 就可以对应为 1+2=3，而对应的等比数列为 1000，因此就可以得到 10×100 等于 1000（表 1）。1484 年，法国数学家许凯撰写了《算数三篇》，在该书的代数部分中，许凯也描述了类似的运算方法，他将 2 的幂值及其对应的指数列成两列并指出第一列的乘法对应于第二列的加法。无独有偶，德国著名代数学家鲁尔多夫曾在他的著作《未知数》中列出过和许凯一样的表。并和许凯一样将这种运算思想扩展到未知数幂如表 2 所示。德国另一个著名的数学家斯蒂菲尔，他在前人的基础上总结出来更一般的运算法则，即几何数列的各项与其指数所形成的算术数列的各项相对应。几何级数中两项相乘或相除得出的项，其指数等于算数级数中相应两项的和或差。斯蒂菲尔基本上认识到了对数的思想[6]。当然，也有其他的数学家发现了这一运算法则，但他们均没有引入对数这一概念。

表 1.阿基米德大数表示法

1	2	3	4	5	...
10	100	1000	10000	100000	...

表 2.徐凯双数表

0	1	2	3	4	...	19	20	...
1	2	4	8	16	...	524288	1048576	...

也有观点认为对数思想源于某些将乘法化为加减法的三角公式[7]，比如 16 世纪天文学家经常使用像这样的公式（1），将冗长的乘法运算转化为加减法运算，从而节约了运算成本并大大降低了运算错误的概率。

$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) \quad (1)$$

总的来说，对数思想根源在于把乘、除、乘方、开方运算转化为加减乘除运算，通过运算的降级，来实现简便运算的目的。

2.2 纳皮尔与对数

纳皮尔的工作是在前人的基础上完成的，当时，哥白尼的日心说被普遍的接受以及球面三角学也得到发展和完善，天文学正在蓬勃发展。而庞大的数字计算无疑对天文学的发展造成了一定的阻碍，纳皮尔也非常热衷于天文学的研究。因此，纳皮尔就开始着手解决天文学中球面三角运算繁琐的问题。受前人几何数列和算数数列相应项对应关系的启发，纳皮尔致力于将正弦的乘法运算转化为加法运算。他仿照雷格蒙塔努斯的方法，将圆的半径分为10^7个单位，以圆弧的半径为正弦。然后纳皮尔创造性地构造了两条数字线（如图 1）。

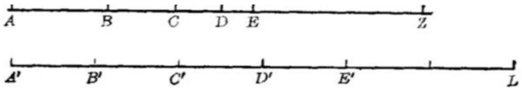

图 1.纳皮尔用运动学解释对数

上面一条线 AZ 上标有从10^7到 0 的正弦值，假设 A 朝着 Z 运动，其速度正比于到 Z 的距离（其比值为 k）。我们考虑某一小段时间 t，设 AB、BC、CD……都是在在这一小段时间 t 上通过的并设在这一段时间内动点的速度不变且取这段时间开始时的速度，因为 DZ=CZ-CD，动点在 C 点的速度就等于 k（CZ），CZ 的距离就等于 k（CZ）t，由此我们就得到了 DZ=（1-kt）CZ，即 AZ、BZ、CZ……中任一长度都是前一长度的（1-kt）倍，AZ、BZ、CZ……其实是一个几何数列。接着纳皮尔又构造了一条线，线上的点与 A 同时开始在直线 A'L（该直线右方无限延长）上恒速运动，即第一个点到达 B，C，D……时，第二个点分别到达 B'，C'，D'……，那么第二条线上每一段距离形成一个算数数列。纳皮尔分别把 A'B'，A'C'，A'D'……的距离 BZ，CZ，DZ……的对数。纳皮尔取 AZ 即10^7的对数为 0（当正弦值按几何数列递减时对数按算术数列递增）。纳皮尔把 1-kt（当 t 越小，对数表里的数越靠近）的量取为$1-10^{-7}$并取算术数列为 1，2，3……（如表 3 所示），纳皮尔把这个运算称为 logarithm（对数），它源于希腊文λόγος(拉丁文 logos)，表示“思想的文字或符号”也可作“计算或者“比率”和希腊词ἀριθμός（数）两个词的结合[8]，所以 logarithm 的原意即比的数，这个“比”指的是几何数列的公比。由此，对数就产生了，纳皮尔的对数是一般数的对数，记为 NAP $\log^x$。纳皮尔的对数思想给了许多数学家启发，

自此，许许多多的对数表被算了出来。1615年布里格斯和纳皮尔合作以10作为底数算出了一张对数表，1727年，欧拉把$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的极限定名为e，1728年欧拉引入了e作为自然对数的底，并梳理了对数和指数的关系。

表 3.纳皮尔对数表

0	1	2	3	...	n	...
10^7	$10^7\times(1-10^{-7})$	$10^7\times(1-10^{-7})^2$	$10^7\times(1-10^{-7})^3$	...	$10^7\times(1-10^{-7})^n$	...

另外要说明一点的是，1600年左右瑞士钟表匠兼数学家比尔吉在《进数表》中也独立发明了对数，这说明对数的产生一方面是由于数学家创造性的活动。另一方面也说明了对数的产生是社会发展和数学发展的必然产物。

2.3 对数传入中国

明末40年左右西方数学第一次比较系统的传入中国，中国学者开启了对西方数学研究的热潮，其中首次把对数介绍到中国的是明末清初数学家薛凤祚。对数一词在引入中国的时候被翻译为假数有时也被翻译为比例数，比如薛凤祚和穆尼阁合著的《比例对数表》中logarithm被翻译为假数，他所翻译的真数一词沿用至今[9]。而在薛凤祚的另一本著作《历学会通》中，他把对数叫做比例数，真数叫做原数。为什么会翻译为真数和假数，可能与对数的运算方法有关，我们在计算乘除时，需要找到几何数列的项对应的算数数列的项，而我们引入算数数列其目的是为了乘除运算，这样的看的话算数数列就像是中间的桥梁，是过渡的。所以把它翻译成了假数，而几何数列的项是参与运算的，所以把它翻译成真数，明清数学家对外国数学著作的翻译还是比较形象的，其实现在所用的对数翻译也很直观的说明了对数的含义。薛凤祚在《比例对数表》中道出了对数的思想和其实用性："今有对数表，则省乘除，而况开方、立方、三、四、五方等法，皆比原法工力十省六七，且无舛错之患。"如表4所示，在同余算（a）中的8，9，10，11满足11=（9+10）-8，则比例算中有1024=（256×512）÷128；同余算（b）中的11，13，15，17满足17=（13+15）-11，则比例算中就有64=（16×32）÷8。那么我们在计算x=（512×1024）÷256，就只需要计算同余算中的（10+11）-9=12，然后我们再在表中找到12所对应的比例算即2048即可。由此可见对数的实用性是非常强的，这是非常符合我国传统数学的特点的，所以不久对数就被国人接受并运用于历法的计算上。但是，穆尼阁在传入对数表时只说明了乘除如何转化为加减法，而没有解释乘方开方转化为乘除的情况以及同余算和比例算之间的关系[10]。

表 4.对数表传入中国

比例算	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
同余算（a）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
同余算（b）	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

3. PME 理论视角下的对数历史与教学的结合

卢克莱修说过："未有任何事物从无中生有"，数学知识是这样的，学生获得知识的过程也是。我们不能直接把知识按历史发展顺序直接灌输进学生的大脑中，所以当现实把我们从对数发现的历史拉出时，新的问题就来了，如何将对数历史与现实结合？我们就需要用PME理论重新审视对数的历史。

从对数的产生历史来看，对数产生于对大数的表示及简便运算的需要。一开始，人们发现两个特殊的数列即算数数列及几何数列存在着对应关系，而利用这种关系恰好可以解决一些大数计算的实际问题。随着人们对于这种对应关系的深入认识，人们逐渐提炼出对数思想并利用该思想发明了对数。而在这一过程中，人们并没有指数的概念以及认识到指数和对数的关系，但我们仍能看出当时的人们已经有了指数的思想。今天的教材中对数的概念是基于指数和对数关系来定义的，这样定义非常明确的指出了对数是指数的逆运算，同时也为后面对数运算性质的推导做了铺垫。建构主义认为有意义的建构要考虑学生已有知识以及不同知识间的联系。同时也认为要在活动中实现知识的内化[11]。学生在学习对数之前已经学习过指数及其运算性质了，这和历史有所差别。但如果直接引入对数的定义仍然比较抽象，历史是从具体案例开始的，我们应回到历史的起点，让学生经历数学发现的过程，在活动中内化数

学知识。所以我们有必要从具体的案例出发，一步步接近对数的思想，从具体的案例中提取出对数的概念并引入对数符号。

4. HPM 和 PME 理论结合下的对数教学策略探究

理查德.费曼说过：“我不能创造的东西，我就没有理解。”所以我们需要提供一个情境，让学生去探索、去发现、去理解。

4.1 创设情境，理解对数思想

对数的产生是为了解决人们的实际需要，我们只有在了解对数的历史，才能明白对数这一数学工具的奇妙之处。我们通过回顾历史发现对数产生的根源在于人们发现了算术数列和几何数列之间存在着某种对应关系，可以把乘法除法运算转化为加减运算，而这种对应关系又可以解决现实中遇到的问题。如果我们在教学中可以提供一个情境，引导学生进行不断抽象从而发现对数的本质。学生就会对对数有一个深刻的认识和理解，并且可以培养学生善于思考、勇尝试的品质。

活动一：同学们，你们能计算出填满整个宇宙所需的沙粒数吗？（学生会很惊讶，）早在公元前 3 世纪古希腊伟大的数学家阿基米德就曾思考过这个问题，他通过估算宇宙和沙粒的大小，最后用宇宙的体积除以每粒沙的体积，从而算出了需要多少粒沙粒。阿基米德在解决这一问题时马上就遇到了一个棘手问题。当时，古希腊最大的数字符号是 M，表示 10000.因为，古希腊人认为超过万的数已属于不可计数的范围。宇宙中的沙粒数肯定是一个超级大的数。该怎么表示呢？

设计意图：引导学生进行数学符号创造，同时也感受到了用指数表示大数的便捷。

活动二：和大家一样，阿基米德致力于找到一种突破传统计数系统的大数表示方式，功夫不负有心人，他最终找到了表示大数的方法。他以万为基础单位，把 1~10000 的数称为第一阶，10001~100000000 的数称为第二阶，以此类推，你能写出第三阶、第四阶……第 k 阶的最大的数吗？（引导学生制作以 10000 为底的双数表，如表 5 所示。）

表 5.以 10000 为底的双数表

1	2	3	4	...	k	...
10000	100000000	1000000000000	10000000000000000	...	10000^k	...

学生会马上反应过来来，阿基米德的表示方法实际上是以 10000 为底的指数，从而的到第 K 阶最大的数答案10000^k 或10^{4k}，从而感受到古代数学家的智慧，并以此制作出以其他数字为底的双数表。（引出所要讨论的话题：古人如何在没有指数概念的情况下进行大数运算的，从而发现规律——指数运算和对数运算互为逆运算同时进一步理解对数的思想。）

4.2 去情境化，对数概念及符号的生成

去情境化是由现实原型抽象过渡到符号化的数学模式[12]。前面已经从具体的情境中学生知道了古人在没有指数概念的前提下是如何进行大数的计算的，并理解了对数思想产生的根源以及在没有指数概念的情况下，双数表给人们进行大数计算所带来的便捷。同时学生会发现问题并不是所有大数都可以通过双数表进行运算。如表 5，要计算 10001×10000002，双数表并没有对应的数字。从而发现问题，为了解决这个问题，需要引入新的运算。

活动三：怎样能具体表示出 10001 和 10000002 在双数表中所对应的数值？

学生发现要具体表示出 10001 和 10000002 在表 5 中所对应的数值是非常困难的，但从活动二中已经发现了规律指数运算和对数运算互为逆运算。（引导学生创设对数符号并引出对数概念）

设计意图：学生理解对数的概念产生以及对数符号创造的重要性。

活动四：大家很有创造力，那么我们来看一下伟大的数学家纳皮尔是怎样来表示这两个数字的。纳皮尔引入了一个符号 log，如果 $a^x=b$，那么 $x=\log_a^b$（$a>0$ 且 $a\neq1$，$b>0$），读作 x 等于以 a 为底 b 的对数。并且把求 x 和 y 的运算称为 logarithm，它是两个希腊词比率和数的结合，即比的数，我们现在把它称为对数，其中 a 叫作底数，b 叫作真数。根据刚才的活动，大家或许对于这个名称以及符号有自己的理解了，大家尝试交流一下 logarithm 到底是什么含义？为什么我们把它翻译成对数？为什么要 a 叫作底数，b 叫作真数？如何用 log 表示 x 和 y?并试着说一下是 $a>0$ 且 $a\neq1$，$b>0$ 怎么得到的？（教师在学生讨论后，向同学们讲解对数的历史，包括对数名称的由来以及我国明

清数学家的翻译工作。）

设计意图：学生了解到对数的名称及符号由来，对对数的概念有了更深刻的认识，同时也感受到了古代数学家的智慧以及我国明清数学家翻译的严谨态度。

5.总结

对数这个名称恰恰蕴含着它的故事，我们只有经历一遍它的发现过程才能真切感受到它的巧妙，我们需要让学生知道它蕴含的思想和妙处。而如何让学生去愿意去接近它，我们就需要与考虑学生的心理和认知规律，因此，只有将 HPM 和 PME 理论进行有效结合才能促进更好地数学教育教学，实现数学学科育人的目标。

参考文献

[1] 冯晓华，袁敏.关于 HPM 和 PME 结合的研究[J].西北大学学报（自然科学版），2005（05）：171-174.
[2] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M].科学出版社，2017.
[3] 赵瑶瑶，张小明.关于历史相似性理论的讨论[J].数学教育学报，2008（04）：53-56.
[4] 李玲，徐章韬.正态分布的教学设计：从历史中寻找学生认知生长点[J].数学教育学报，2023，32（02）：12-17.
[5] Kline M. The ancients versus the moderns，a new battle of the books1[J]. Mathematics Teacher, 1958, 51(6): 418-427.
[6] 克莱因 M.古今数学思想（第一册）[M].张理京，张锦炎，译.上海：上海科学技术出版社，2014.
[7] 卡茨 V. J.数学史通论[M].李文林，等译.北京：高等教育出版社，2004.
[8] 徐品方，张红.数学符号史[M].科学出版社，2006.
[9] 李迪.中国数学史大系·第七卷：明末到清初[M].吴文俊，主编.北京：北京师范大学出版社，1999.
[10]钱宝琮.中国数学史[M].北京：科学出版社，1981.
[11]李士锜.PME：数学教育心理[M].上海：华东师范大学出版社，2001.
[12]李月胜.去情境，从生活数学走向符号世界[J].上海教育科研，2019，（12）：69-72+42.