iedu
科学技术与教育 2025年第11期
ISSN: 3079-4455

带 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程正解的存在性

解大鹏，许和乾，刘洋*
合肥师范学院数学与统计学院，安徽合肥，中国
*通讯作者

【**摘要**】本文探究了一类带有 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程，利用不动点定理得到了该方程组解的存在性.

【**关键词**】p-Laplacian 算子;分数阶微分方程; 不动点定理

【**基金项目**】国家自然科学基金项目（12171134；62172183）；安徽省高等学校省级质量工程项目（2024zygzts084；2024xsxx054）合肥师范学院校级重点科研项目（2023ZD06）

1.引言

本文探究带有 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程：

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\beta}\left(\varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(t)\right)\right)=f(t,u(\theta(t)),0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=0,u(1)=h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right), \\ \varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(0)\right)=\varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(1)\right)=0, \end{cases} \quad (1)$$

其中

$\varphi_p(s)=s|s|^{p-2},\ p>1,$

$\varphi_p^{-1}=\varphi_q, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 2<\alpha\le 3, 1<\beta\le 2, f\in\left(C[0,1]\times R^+,R^+\right)$

$D_{0^+}^{\alpha}, D_{0^+}^{\beta}$ 是 Riemann-Liouville 分数阶导数,$h:[0,+\infty)\to R^+$ 的连续增函数，$\theta,\upsilon\in\left(C[0,1],R\right)$ 且 υ 是增函数，$0\le\theta(t)\le t$, $\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)$ 是 Niemann-Stilettoes 积分.

令 $h(t)=t,\upsilon'(t)=g(t)$, 问题（1）可转化为如下问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\beta}\left(\varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(t)\right)\right)=f(t,u(\theta(t)),0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=0,u(1)=\int_0^1 g(s)u(s)ds, \\ \varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(0)\right)=\varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(1)\right)=0, \end{cases} \quad (2)$$

在文献[1]中，周新悦等应用不动点定理得到了其解的存在性.

受文献[1-8]启发，本文将探究问题(1)的正解的存在性,首先得到问题(1)对应的格林函数，并验证格林函数的性质,进而得到了问题(1)的等价积分方程，最后，利用不动点定理证明问题(1)正解的存在性.

2.预备知识和引理

引理 1：假设 $y\in C[0,1]$，则问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+y(t)=0, 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=0,u(1)=h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right), \end{cases} \quad (3)$$

有唯一解

$u(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)ds+t^{\alpha-1}h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right)$，其中：

$$G(t,s)\begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0\le s\le t\le 1, \\ \dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0\le t\le s\le 1, \end{cases} \quad (4)$$

证明：问题（2）的通解为

$$u(t)=-\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)ds+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+C_3t^{\alpha-3} \quad (5)$$

由 $u(0)=u'(0)=0,u(1)=h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right)$，得，

$C_2=C_3=0,$

$$C_1=\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)ds+h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right) \quad (6)$$

所以，

$$u(t)=-\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)ds+\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)ds+t^{\alpha-1}h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right)$$
$$=\int_0^1 G(t,s)y(s)ds+t^{\alpha-1}h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right) \quad (7)$$

引理 2：假设 $w\in C[0,1]$，则问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\beta}\left(\varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(t)\right)\right)=w(t), 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=0,u(1)=h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right) \\ \varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(0)\right)=\varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(1)\right)=0, \end{cases} \quad (8)$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)w(\tau)d\tau\right)ds+t^{\alpha-1}h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right) \quad (9)$$

这里：

$$H(t,\tau)=\begin{cases} \dfrac{(t-t\tau)^{\beta-1}-(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, 0\le s\le t\le 1, \\ \dfrac{(t-ts)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, 0\le t\le s\le 1, \end{cases} \quad (10)$$

证明：问题（3）等价于

$\varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(t)\right)=\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}w(\tau)d\tau+C_1t^{\beta-1}+C_2t^{\beta-2},$

结合 $\varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(0)\right)=\varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(1)\right)=0,$ 可得，

$C_2=0$, 且 $C_1=\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}w(\tau)d\tau$，因此,

$$\varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(t)\right)=\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}w(\tau)d\tau-\int_0^1\frac{(t-t\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}w(\tau)d\tau=-\int_0^1 H(t,\tau)w(\tau)d\tau, \quad (11)$$

其中

$$H(t,\tau)=\begin{cases}\frac{(t-t\tau)^{\beta-1}-(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0\le s\le t\le 1,\\ \frac{(t-ts)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0\le t\le s\le 1,\end{cases} \quad (12)$$

即 $D_{0^+}^{\alpha}u(t)+\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)w(\tau)d\tau\right)=0$，结合引理 2 可得,

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)w(\tau)d\tau\right)ds+t^{\alpha-1}h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right) \quad (13)$$

类同引理 1 及引理 2 易知：

引理 3[7]：$G(t,s)$ 有如下的性质：

(1) $0\le G(t,s)\le\omega(s)$, $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$, 其中 $\omega(s)=\frac{s(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}$,

(2) $G(t,s)\ge k(t)\omega(s),(t,s)\in\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ 其中

$$k(t)=\min\left\{\frac{(1-t)t^{\alpha-2}}{\alpha-1},\frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right\}=\begin{cases}\frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1}, & 0\le t\le\frac{1}{2},\\ \frac{(1-t)t^{\alpha-2}}{\alpha-1}, & \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases} \quad (14)$$

引理 4：$H(t,s)$ 有如下的性质：

(1) $0\le H(t,s)\le\vartheta(s)$, $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$, 其中 $\vartheta(s)=\frac{s(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta-1)}$,

(2) $H(t,s)\ge\frac{\vartheta(s)}{4^{\beta-1}(\beta-1)},(t,s)\in I\times(0,1)=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\times(0,1).$ (15)

证明：显然 $H(t,s)\ge 0$, $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$，当 $t\ge s$ 时,

$$\begin{aligned}H(t,s)&=\frac{(t-ts)^{\beta-1}-(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}=\frac{(\beta-1)}{\Gamma(\beta)}\int_{t-s}^{t(1-s)}x^{\beta-2}dx\\&=\frac{(\beta-1)[t(1-s)]^{\beta-2}[t(1-s)-(t-s)]}{\Gamma(\beta)}\\&\le\frac{[t(1-s)]^{\beta-2}s(1-s)}{\Gamma(\beta-1)}\le\frac{(1-s)^{\beta-2}s(1-s)}{\Gamma(\beta-1)}=\vartheta(s).\end{aligned} \quad (16)$$

且，当 $(t,s)\in I\times(0,1)=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\times(0,1)$ 时,

$$\begin{aligned}H(t,s)&=\frac{(t-ts)^{\beta-1}-(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}=\frac{(t-ts)^{\beta-2}(t-ts)-(t-s)^{\beta-2}(t-s)}{\Gamma(\beta)}\ge\\&\frac{t(1-s)^{\beta-2}s(1-t)}{\Gamma(\beta)}=\frac{t^{\beta-2}(1-s)^{\beta-1}s(1-t)}{(1-s)\Gamma(\beta)}\ge\frac{t^{\beta-2}(1-t)}{(\beta-1)}\cdot\frac{s(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta-1)}\ge\frac{\vartheta(s)}{4^{\beta-1}(\beta-1)}.\end{aligned} \quad (17)$$

当 $t\le s$ 时,

$$H(t,s)=\frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\le\frac{t^{\beta-2}s(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta-1)}\le\frac{s(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta-1)}=\vartheta(s). \quad (18)$$

且，当 $(t,s)\in I\times(0,1)=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\times(0,1)$ 时,

$$\begin{aligned}H(t,s)&=\frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}=\frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{(\beta-1)\Gamma(\beta-1)}\ge\\&\frac{t^{\beta-1}}{(\beta-1)}\cdot\frac{s(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta-1)}\ge\frac{\vartheta(s)}{4^{\beta-1}(\beta-1)}.\end{aligned} \quad (19)$$

3.主要结果

设 $E=C([0,1],R)$，其范数定义为 $\|x\|=\max_{0\le t\le 1}|x(t)|,u\in E$,锥 $K\subset E$ 分别定义为:

$$K=\left\{\begin{matrix}u\in E:\min_{t\in[0,1]}u(t)\ge 0\\ \min_{t\in I}u(t)\ge\frac{1}{4^{\alpha-1}(\alpha-1)}\|u\|\end{matrix}\right\} \quad (20)$$

且 $K\subset E$,下面我们定义算子 $T:K\to E$,

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\theta(\tau)))d\tau\right)ds+t^{\alpha-1}h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right) \quad (21)$$

那么边值问题(1)有一个解当且仅当 T 有一个不动点。令

$$\Delta=\left(\int_I\omega(s)\varphi_q\left(\frac{1}{4^{\beta-1}(\beta-1)}\int_I\vartheta(\tau))d\tau\right)ds\right)^{-1},\quad \Lambda=\left(\int_0^1\omega(s)\varphi_q\left(\int_0^1\vartheta(\tau))d\tau\right)ds\right)^{-1} \quad (22)$$

引理 5：算子 $T:K\to E$ 是全连续算子。

证明：易知 $T:K\to E$ 是连续的. 根据引理 3 及 4 得：

$$\begin{aligned}\min_{t\in I}(Tu)(t)&=\min_{t\in I}\left\{\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\theta(\tau)))d\tau\right)ds+t^{\alpha-1}h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right)\right\}\ge\\&\frac{1}{4^{\alpha-1}(\alpha-1)}\left\{\int_0^1\omega(s)f(s,u(\theta(s)))ds+h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right)\right\}\ge\frac{1}{4^{\alpha-1}(\alpha-1)}\|Tu\|.\end{aligned} \quad (23)$$

所以 $T(K)\subset K$，再依据 Arzela-Ascoli 定理可得，算子 $T:K\to E$ 是全连续算子.

定理 1：假设常数 $R>r>0$ 满足：

(H_1) $f(t,u(\theta(t)))\ge\varphi_p(\Delta 4^{\alpha-1}(\alpha-1)r),(t,u)\in[0,1]\times[0,r];$ (24)

(H_2) $f(t,u(\theta(t)))\le\varphi_p\left(\frac{\Lambda R}{2}\right),(t,u)\in[0,1]\times[0,R];$ (25)

则问题 (1) 至少有一个正解.

证明： 令 $\Omega_1=\{u\in E:\|u\|\le r\}$，对于 $u\in\partial\Omega_1$，由引理 3、4 及 (H_1) 知：

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\theta(\tau)))d\tau\right)ds+t^{\alpha-1}h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right)\ge$$

$$\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\theta(\tau)))d\tau\right)ds\ge$$

$$\Delta\cdot 4^{\alpha-1}(\alpha-1)\cdot r\cdot\frac{\left(\int_I \omega(s)\varphi_q\left(\frac{1}{4^{\beta-1}(\beta-1)}\int_I \vartheta(\tau))d\tau\right)ds\right)}{4^{\alpha-1}(\alpha-1)}=r. \tag{26}$$

故，当 $u\in\partial\Omega_1$ 时，

$$\|Tu\|\ge\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1. \tag{27}$$

另一方面,令 $\Omega_2=\{u\in E:\|u\|\le R\}$,其中 $R\ge\max\{2h(R(\upsilon(1)-\upsilon(0))),r\}$

对于 $u\in\partial\Omega_2$，由引理 3、4 及 (H_2) 知：

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\theta(\tau)))d\tau\right)ds+t^{\alpha-1}h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right)\le$$

$$\int_0^1 \omega(s)\varphi_q\left(\int_0^1 \vartheta(s)f(\tau,u(\theta(\tau)))d\tau\right)ds+h\left(\int_0^1 u(s)d\upsilon(s)\right)\le$$

$$\frac{\Lambda R}{2}\left(\int_0^1 \omega(s)\varphi_q\left(\int_0^1 \vartheta(\tau))d\tau\right)ds\right)+h(R(\upsilon(1)-\upsilon(0)))\le R \tag{28}$$

于是,当 $u\in\partial\Omega_2$ 时，

$$\|Tu\|\le\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2. \tag{29}$$

综上,由不动点定理[8]知,问题(1)至少有一个正解. （证毕）

参考文献

[1]周新悦,李永昆. 一类带有 p-Laplacian 算子和积分边界条件的分数阶微分方程边值问题解的存在性[J]. 应用数学,2023(4):1042-1049.

[2] Kenef E, Merzoug I, Guezane-lakoud A. Existence, uniqueness and Ulam stability results for a mixed-type fractional differential equations with p-Laplacian operator [J]. Arabian Journal of Mathematics,2023(12):633-645.

[3] 周文学,吴亚斌,宋学瑶. 带 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题正解的存在性与多重性[J]. 应用数学,2023(4):997-1006.

[4] 潘欣媛，何小飞，陈国平. 一类 Caputo-Hadamard 型分数阶微分方程耦合系统边值问题[J]. 应用数学，2023(4):987-996.

[5] 许佰雁，姜亦成，田纪亚. 一类具有 p-Laplacian 算子和积分边界条件的分数阶微分方程解的存在性[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(15): 177-183.

[6] Xie D P , Bai C Z, Zhou H and Liu Y, Positive solutions for a coupled system of semipositone fractional dierential equations with the integral boundary conditions[J]. Eur. Phys. J. Special Topics, 2017,226:3551-3566 .

[7] Joshih, Yavuzm. Transition dynamics between a novel coinfection model of fractional-order for COVID-19 and tuberculosis via a treatment mechanism [J]. The European Physical Journal Plus, 2023, 138(5): 468.

[8] 白占兵.分数阶微分方程边值问题理论及应用[M].北京:中国科学技术出版社,2013.