

带有随机系数的 WOD 线性过程的完全矩收敛性

章茜

浙江机电职业技术大学, 浙江杭州, 中国

【摘要】在随机过程理论中, 线性过程的收敛性是概率极限理论的重要研究方向。本文综合运用 WOD 随机变量序列部分和最大值的 Rosenthal 型矩不等式, 结合精细的概率极限运算与级数收敛判别技巧, 旨在通过探索 WOD 随机变量序列的概率特性, 剖析随机系数与 WOD 序列的相依性交互机制, 建立带有随机系数的线性过程在 WOD 框架下的完全矩收敛理论, 进而推导满足完全矩收敛的充分条件, 实现对弱相依结构下随机过程收敛性的精确刻画, 为弱相依结构下的随机模型分析提供更普适的理论支撑。

【关键词】WOD 随机变量序列; 随机系数; 线性过程; 完全矩收敛性

【基金项目】浙江省教育厅一般科研资助项目 (编号: Y202248765)

1. 引言

令 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为随机变量列, 且 $a_n > 0$, $b_n > 0$, $q > 0$ 。若对任意的 $\varepsilon > 0$, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} E\{b_n^{-1} |X_n| - \varepsilon\}_+^q < \infty$ 成立, 则称 X_n 是 q 阶完全矩收敛。由完全矩收敛性的定义可得, 完全矩收敛性包含了完全收敛性的, 是比完全收敛性更宽泛的极限理论。因此, 对随机变量序列完全矩收敛性的研究是有重要的理论意义。我们具体可参考文献[1-3]。

假设 $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ 是一独立同分布随机变量序列, $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是一实数列。那么 $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$ $\{X_t, t > 0\}$ 是一个线性过程或者是滑动平均过程。线性过程构成了一类基础随机模型, 广泛应用于多个学科领域, 如: 电子、金融、时间序列分析等。此外, 其渐近性质已成为众多研究者广泛理论研究的主题。

例如: Louhichi 等[4]研究了无限方差时间序列的极限性质。Xu[5]在线性次期望背景下建立了滑动平均过程的完全矩收敛性。Zhang 等[6]进一步研究了一类随机变量生成的滑动平均过程的完全矩收敛性。另外, 研究人员同时也对具有随机系数的线性过程的相关性质产生兴趣。例如, Resnick, S.I., & Willekens, E. [7]研究了滑动平均过程的尾部的性质。Wu 等[8]研究随机系数线性过程中均值漂移检测的 CUSUM 估计收敛性。

下面是具有随机系数的线性过程的定义。

定义 1.1. $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 及 $\{B_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是两列随机变量序列, 令

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_j \varepsilon_{t-j}$$

那么称 $\{X_t, t > 0\}$ 是带有随机系数的线性过程。

近年来, 学者 Hossenin and Nezakati [9]在带有随机系数的扩展负相依 (END) 线性过程的背景下, 研究了 Marcinkiewicz-Zygmund 型强大数定律收敛度。

令 $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 和 $\{B_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 两列同分布的 END 随机变量序列, 他们得到了如下成果:

定理 1.1. 假设 $r > 1$, $1 \leq p < 2$,

$1 < rp < 2$, $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_j \varepsilon_{t-j}$ 是带有随机系数

的线性过程。 $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是均值为 0 的 END 随机变量序列, 且被非负随机变量 ε 随机控制, 同时还满足 $E\varepsilon^{rp} < \infty$ 。 $\{B_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是另一均值为 0 的随机变量序列, 若

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} E|B_j|^p < \infty \quad (1)$$

及当 $rp < q \leq 2$,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} E|B_j|^q < \infty \quad (2)$$

且 $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 与 $\{B_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 互相独立, 那么对任意的 $\eta > 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\left\{\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| > n^{1/p} \eta\right\} < \infty. \quad (3)$$

其中 $q > \lambda > p$ 。

此外, 学者 Wang 等[10]提出了另一种相依结构, 见如下定义。

定义 1.2. 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一随机变量列。

(1) 若存在实数列 $\{g_u(n), n \geq 1\}$, 使得对所有的 $x_i \in (-\infty, +\infty)$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 1$ 都有

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \dots, X_n > x_n) \leq g_u(n) \prod_{i=1}^n P(X_i > x_i) \quad (4)$$

则称随机变量列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是宽上限相依 (WUOD) 序列。

(2) 若存在实数列 $\{g_l(n), n \geq 1\}$, 使得对所有的 $x_i \in (-\infty, +\infty)$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 1$ 都有

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \leq g_l(n) \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i) \quad (5)$$

则称随机变量列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是宽下限相依 (WLOD) 序列。

若 (4) 式和 (5) 式均成立, 则称随机变量列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 宽限相依 (WLOD) 序列, $g_u(n)$ 及 $g_l(n)$, $n \geq 1$ 称为控制系数。

由 WOD 随机变量的定义, 若 (4) 式和 (5) 式均满足 $g_u(n) = g_l(n) = M$, $n \geq 1$, M 是正常数, 那么称随机变量列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为宽相依 (END) 序列, 该定义由学者 Liu[11]提出。特别的, 若 $g_u(n) = g_l(n) = 1$, $n \geq 1$, 那么称随机变量列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为负象限相依 (NOD) 序列, 该定义由学者 Lehmann [12]提出。自从 WOD 随机变量列的定义提出后, 国内外学者对此序列的概率极限理论及相关应用做了不少研究。例如: Wang 等[13]在研究 WOD 阵列完全收敛性的基础上还进行了基于 WOD 误差的非参数回归模型中估计量完全一致性的研究。Wu 等[14]探讨了在 R - h 一致可积的条件下 WOD 阵列的 L^r 收敛性、完全收敛性和完全矩收敛性。Yao 等[15]探究了 WOD 随机变量列的强大数定律、完全收敛性及其在非参数回归模型中的应用。Lang 等[16]研究了 WOD 列随机加权求和的完全收敛性及进一步分析了基于 WOD 误差的线性时不变系统观测状态的收敛性。Chen 等[17]讨论了 WOD 列加权求和的完全收敛。Shen 等[18]给出了 WNOD 随机变量列的一些强收敛性质并作了在非参数回归模型中相关应用。Ding 等[19]聚焦 WOD 随机变量列加权求和的强收敛性及在 EV 回归模型中的应用。

在本论文中, 我们致力于研究由 WOD 随机变量序列生成的带有随机系数的线性过程的完全矩收敛性。论文中, $\{\eta_n, n \in Z\}$ 和 $\{B_n, n \in Z\}$ 是两列随机变量列。本文的目的是将定理 1.1 中 END 随机变量的条件下推广到 WOD 随机变量的条件下, 并得到更一般的完全矩收敛, 结果如下:

定理 3.1 令 $r > 0$, $1 \leq p < 2$, $1 < rp < 2$,

$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varepsilon_{t-j}$ 为带有随机系数的线性过程。

$\{\varepsilon_n, n \in Z\}$ 是均值为 0 的 WOD 随机变量列。控制系数为 $g(n) = O(\log^\theta n)$, $\theta > 0$, 且被非负随机变量 ε 所控制, 满足 $E\varepsilon^p \log^{2\theta}(1+\varepsilon) < \infty$ 。 $\{A_n, n \in Z\}$ 是另一均值为 0 的 WOD 随机变量列, 且满足

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} E|A_j|^p < \infty \quad (6)$$

及,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} E|A_j|^q < \infty \quad (7)$$

其中 $rp < q \leq 2$, 且与 $\{\varepsilon_n, n \in Z\}$ 独立, 则对任意的 $\eta > 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-\lambda/p} E \left\{ \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| - n^{1/p} \eta \right\}_+^\lambda < \infty \quad (8)$$

成立, 其中 $q > \lambda > p$ 。

本文中, C 表示正常数, 且在不同的地方可为不同的值。

2. 定理的证明

为了证明定理 1.2, 需要以若干下引理。

引理 2.1 [20] 假设 $\{\eta_n, n \geq 1\}$ 是一被非负随机变量 η 随机控制的随机变, 即满足 $\sup_{n \geq 1} P(|\eta_n| > t) \leq CP(\eta > t)$, $t \geq 0$ 。那么对 $n \geq 1$, $a > 0$, $b > 0$, 有下列结论成立:

$$\begin{aligned} & E|\eta_n|^a I\{|\eta_n| \leq b\} \\ & \leq C(E[\eta^a I\{\eta \leq b\}] + b^a P(\eta > b)) \\ & \text{及 } E|\eta_n|^a I\{|\eta_n| > b\} \leq CE[\eta^a I\{\eta > b\}] \end{aligned}$$

因此, $E|\eta_n|^a \leq CE[\eta^a]$, $n \geq 1$ 。

引理 2.2. [10] 令 $\{\eta_n, n \geq 1\}$ 是一 WOD 随机变量列, $\{f_n(\cdot), n \geq 1\}$ 是不增函数, 那么 $\{f_n(\eta_n), n \geq 1\}$ 也是 WOD 随机变量。

引理 2.3. [21] 令 $1 \leq p \leq 2$, $\{\eta_n, n \geq 1\}$ 是控制系数为 $g(n)$ 的随机变量序列, $n \geq 1$. 进一步假设 $E\eta_n = 0$, $E|\eta_n|^p < \infty$, $n \geq 1$. 那么存在仅 p 有关的正数 $C_1(p)$ 及 $C_2(p)$, 有

$$E \left| \sum_{i=1}^n \eta_i \right|^p \leq [C_1(p) + C_2(p)g(n)] \sum_{i=1}^n E|\eta_i|^p$$

基于引理 2.3, 我们有下列引理:

引理 2.4. 令 $1 \leq p \leq 2$, $\{\eta_n, n \geq 1\}$ 是一均值为 0 的 WOD 随机变量列且满足 $E|\eta_n|^p < \infty$.

$\{B_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是一随机变量列, 且 $E|B_n|^p < \infty$,

$\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 与 $\{B_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 独立。若 $\sum_{i=-\infty}^n \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right) \eta_i < \infty$, 我们有

$$E \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right) \eta_i \right|^p \leq [C'_1(p) + C'_2(p)g(n)] \sum_{i=-\infty}^{\infty} E \left| \sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right| E|\eta_i|^p \quad (9)$$

其中 $C'_1(p) = 2^{p-1}C_1(p)$, $C'_2(p) = 2^{p-1}C_2(p)$.

证明利用 Fatou's 引理及 Cr 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} E \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right) \eta_i \right|^p &= E \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=-m}^m \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right) \eta_i \right|^p \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E \left| \sum_{i=-m}^m \left(\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right)^+ - \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right)^- \right) \eta_i \right|^p \\ &\leq 2^{p-1} \limsup_{m \rightarrow \infty} E \left| \sum_{i=-m}^m \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right)^+ \eta_i \right|^p \\ &\quad + 2^{p-1} \limsup_{m \rightarrow \infty} E \left| \sum_{i=-m}^m \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right)^- \eta_i \right|^p \\ &= I_1 + I_2. \quad (10) \end{aligned}$$

对于 $n \geq 1$ 及 $i \in \mathbb{Z}$, $\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} b_j \right)^+$ 是一个正数。

由引理 2.2 可知, $\left\{ \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} b_j \right)^+ \eta_i, i \in \mathbb{Z} \right\}$ 是均值为 0 的 WOD 随机变量。因此, 由引理 2.3, 我们有

$$E \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right)^+ \eta_i \right|^p$$

$$\begin{aligned} &= E \left[E \left| \sum_{i=-m}^m \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right)^+ \eta_i \right|^p \middle| B_{-m+1} = b_{-m+1}, \dots, B_{m+n} = b_{m+n} \right] \\ &\leq [C_1(p) + C_2(p)g(n)] E \left[E \left| \sum_{i=-m}^m \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right)^+ \eta_i \right|^p \middle| B_{-m+1} = b_{-m+1}, \dots, B_{m+n} = b_{m+n} \right] \\ &\leq [C_1(p) + C_2(p)g(n)] \sum_{i=-m}^m E \left(\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right)^+ \right)^p E|\eta_i|^p \quad (11) \end{aligned}$$

对于 I_1 , 我们有

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 2^{p-1} [C_1(p) + C_2(p)g(n)] \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=-m}^m \sup E \left(\left(\sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right)^+ \right)^p E|\eta_i|^p \\ &\leq 2^{p-1} [C_1(p) + C_2(p)g(n)] \sum_{i=-\infty}^{\infty} E \left| \sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right|^p E|\eta_i|^p \quad (12) \end{aligned}$$

因为 $\left\{ \left(\sum_{j=1-i}^{n-i} b_j \right)^- \eta_i, i \in \mathbb{Z} \right\}$ 也是均值为 0 的

WOD 随机变量和 I_1 的证明方式一样, 有

$$I_2 \leq 2^{p-1} [C_1(p) + C_2(p)g(n)] \sum_{i=-\infty}^{\infty} E \left| \sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right|^p E|\eta_i|^p \quad (13)$$

综上所述, 根据式 (10) - (13), (9) 式成立, 证毕。

引理 2.5. [2] 令和 $\{Z_i, 1 \leq i \leq n\}$ 是随机变量列, 那么对任意 $\{Y_i, 1 \leq i \leq n\}$ 的 $q > r > 0$, $\varepsilon > 0$, $a > 0$, 有以下不等式成立:

$$\begin{aligned} E \left(\left| \sum_{i=1}^n (Y_i + Z_i) \right| - \varepsilon a \right)_+^r &\leq \\ C_r \left(\varepsilon^{-q} + \frac{r}{q-r} \right) a^{r-q} E \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right|^q &+ C_r E \left| \sum_{i=1}^n Z_i \right|^r \end{aligned}$$

其中 $0 < r \leq 1$ 时, $C_r = 1$, $r > 1$ 时, $C_r = 2^{r-1}$.

由 $E\eta_i = 0$, $i \in \mathbb{Z}$ 及 $C'_2(p) = 2^{p-1}C_2(p)$ $n \geq 1$, 定义

$$\eta_i = \eta_{ni}' - E\eta_{ni}' + \eta_{ni}'' - E\eta_{ni}''$$

其中 $\eta_{ni}' = \eta_i I[|\eta_i| \leq n^{1/p}] + n^{1/p} I[\eta_i > n^{1/p}] - n^{1/p} I[\eta_i < -n^{1/p}]$

$\eta_{ni}'' = (\eta_i - n^{1/p}) I[\eta_i > n^{1/p}] + (\eta_i + n^{1/p}) I[\eta_i < -n^{1/p}]$
根据引理 2.2, $\{\eta_{ni}' - E\eta_{ni}', i \in \mathbb{Z}\}$ 及 $\{\eta_{ni}'' - E\eta_{ni}'', i \in \mathbb{Z}\}$ 仍然为 WOD 随机变量, 且均值为 0, 易知

$$|\eta_{ni}'| = |\eta_i| I[|\eta_i| \leq n^{1/p}] + n^{1/p} I[|\eta_i| > n^{1/p}] \quad (14)$$

$$|\eta_{ni}''| = |\eta_i| I[|\eta_i| > n^{1/p}] \quad (15)$$

因此, $\forall n \geq 1$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n X_t &= \sum_{t=1}^n \sum_{j=-\infty}^{\infty} \eta_{t-j} \\ &= \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=1-i}^{n-i} A_j \eta_i \\ &= \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=1-i}^{n-i} A_j (\eta_{ni}' - E\eta_{ni}') + \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=1-i}^{n-i} A_j (\eta_{ni}'' - E\eta_{ni}'') \end{aligned}$$

由引理 2.5 有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-\lambda/p} E \left\{ \left| \sum_{t=1}^n X_t \right| - n^{1/p} \varepsilon \right\}^{\lambda} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-\lambda/p} E \left\{ \left| \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=1-i}^{n-i} B_j (\eta_{ni}' - E\eta_{ni}') + \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=1-i}^{n-i} B_j (\eta_{ni}'' - E\eta_{ni}'') \right| - n^{1/p} \varepsilon \right\}^{\lambda} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p} E \left| \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=1-i}^{n-i} B_j (\eta_{ni}' - E\eta_{ni}') \right|^q + \\ &\quad C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-\lambda/p} E \left| \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=1-i}^{n-i} B_j (\eta_{ni}'' - E\eta_{ni}'') \right|^{\lambda} \\ &= H_1 + H_2. \end{aligned} \quad (16)$$

先证明 $H_1 < \infty$, 由 Cr 不等式, 引理 2.1, 引理 2.4, 及定理 1.2 中的条件 (6) 和 (7), $g(n) = O(\log^{\theta} n)$, $\theta > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} H_1 &= C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p} E \left| \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=1-i}^{n-i} B_j (\eta_{ni}' - E\eta_{ni}') \right|^q \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p} \log^{\theta} n \sum_{i=-\infty}^n E |\eta_{ni}' - E\eta_{ni}'|^q E \left| \sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right|^q \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p} \log^{2\theta} n \sum_{j=-\infty}^n \sum_{i=1-j}^{n-j} E |B_j|^q (E |\eta_i|)^q \\ &\quad I[|\eta_i| \leq n^{1/p}] + n^{q/p} P(|\eta_i| > n^{1/p}) \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p} \log^{2\theta} n \sum_{j=-\infty}^n \sum_{i=1-j}^{n-j} E |B_j|^q E |\eta_j|^q I[|\eta_j| \leq n^{1/p}] \\ &\quad + C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \log^{2\theta} n \sum_{j=-\infty}^n \sum_{i=1-j}^{n-j} E |B_j|^q P(|\eta_j| > n^{1/p}) \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-q/p} \log^{2\theta} n (E \eta^q I[\eta \leq n^{1/p}] + n^{q/p} P(\eta > n^{1/p})) \sum_{j=-\infty}^n E |B_j|^q \\ &\quad + C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \log^{2\theta} n P(\eta > n^{1/p}) \sum_{j=-\infty}^n E |B_j|^q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-q/p} \log^{2\theta} n (E \eta^q I[\eta \leq n^{1/p}] + C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \log^{2\theta} n P(\eta > n^{1/p})) \\ &= H_{11} + H_{12}. \end{aligned} \quad (17)$$

对于 H_{11} , 因为 $rp < q$, 则有

$$\begin{aligned} H_{11} &= C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-q/p} \log^{2\theta} n \sum_{i=1}^n E \eta^q I[(i-1)^{1/p} < \eta < i^{1/p}] \\ &= C \sum_{i=1}^{\infty} E \eta^q I[(i-1)^{1/p} < \eta < i^{1/p}] \sum_{n=i}^{\infty} n^{r-1-q/p} \log^{2\theta} n \\ &\leq C \sum_{i=1}^{\infty} i^{r-q/p} \log^{2\theta} i \sum_{i=1}^n E \eta^q I[(i-1)^{1/p} < \eta \leq i^{1/p}] \\ &\leq CE \eta^{rp} \log^{2\theta} (1 + \eta) < \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

对于 H_{12} , 由 $rp > 1$, 得到

$$\begin{aligned} H_{12} &= C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \log^{2\theta} n P(\eta > n^{1/p}) \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-1/p} \log^{2\theta} n E \eta I[\eta > n^{1/p}] \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-1/p} \log^{2\theta} n \sum_{m=n}^{\infty} E \eta I[m^{1/p} < \eta \leq (m+1)^{1/p}] \\ &= C \sum_{m=1}^{\infty} E \eta I[m^{1/p} < \eta \leq (m+1)^{1/p}] \sum_{n=1}^m n^{r-1-1/p} \log^{2\theta} n \\ &\leq C \sum_{m=1}^{\infty} m^{r-1/p} \log^{2\theta} m E \eta I[m^{1/p} < \eta \leq (m+1)^{1/p}] \\ &\leq CE \eta^{rp} \log^{2\theta} (1 + \eta) < \infty. \end{aligned} \quad (19)$$

再证明 H_2 由 Jensen 不等式, 引理 2.1 及引理 2.4, $r > 1$ 及 $\lambda > p$, 我们有

$$\begin{aligned} H_2 &= C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-\lambda/p} E \left| \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=1-i}^{n-i} B_j (\eta_{ni}'' - E\eta_{ni}'') \right|^{\lambda} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-\lambda/p} \left(E \left| \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=1-i}^{n-i} B_j (\eta_{ni}'' - E\eta_{ni}'') \right|^p \right)^{\frac{\lambda}{p}} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-\lambda/p} (\log n)^{\frac{\lambda\theta}{p}} \left(\sum_{i=-\infty}^n E \left| \sum_{j=1-i}^{n-i} B_j \right|^p E |\eta_{ni}'' - E\eta_{ni}''|^p \right)^{\frac{\lambda}{p}} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-\lambda/p} (\log n)^{\frac{\lambda\theta}{p}} \left(\sum_{j=-\infty}^n \sum_{i=1-j}^{n-j} E |B_j|^p E |\eta_{ni}''|^p \right)^{\frac{\lambda}{p}} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-\lambda/p} (\log n)^{\frac{\lambda\theta}{p}} \left(\sum_{j=-\infty}^n \sum_{i=1-j}^{n-j} E |B_j|^p E |\eta_i|^p I[|\eta_i| > n^{1/p}] \right)^{\frac{\lambda}{p}} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-\lambda/p} (\log n)^{\frac{\lambda\theta}{p}} \left(n E \eta^p I[\eta > n^{1/p}] \sum_{j=-\infty}^n E |B_j|^p \right)^{\frac{\lambda}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-\lambda/p} (\log n)^{\frac{\lambda\theta}{p}} \left(n^{1+\frac{1}{p}(p-rp)} E \eta^{rp} I[\eta > n^{1/p}] \right)^{\frac{\lambda}{p}} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{(r-1)(p-\lambda)-1}{p}} (\log n)^{\frac{\lambda\theta}{p}} \\ &< \infty. \quad (20) \end{aligned}$$

综上所述, 由 (16) 式 - (20) 式, (8) 式成立, 定理 1.2 得证。

注 1. 令 $\{B_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 是一 WOD 随机变量列, 且 $P(B_j = -j^{-1/p}) = P(B_j = j^{-1/p}) = 1/2$, 那么对于 $p < q$, 有 $\sum_{j=-\infty}^{\infty} E|B_j|^p < \infty$ 及

$\sum_{j=-\infty}^{\infty} E|B_j|^q < \infty$ 。我们也注意到与一般的滑动平均过程不同, (6) 式推不出 (7) 式, 同时 (7) 式也推不出 (6) 式。

注 2. WOD 是包含 END, NOD 及 NA 的更广泛的随机变量, 因此定理 1.2 的结果对于上述相依序列也成立。

3. 结论

定理 1.2 得到了在更广泛的随机变量 WOD 条件下的线性过程的完全矩收敛性, 而完全收敛性蕴含了完全收敛性, 因此推广了相应文献中的定理即本文中的定理 1.1。

参考文献

- [1] Wu, Y. F., M. Z. Song, and C. H. Wang. Complete moment convergence and mean convergence for arrays of rowwise extended negatively dependent random variables[J]. The Scientific World Journal, 2014 (478612), 7pages.
- [2] Wu, Y., X. J. Wang, S. H. Hu. Complete moment convergence for weighted sums of weakly dependent random variables and its application in nonparametric regression model[J]. Statistics & Probability Letters, 2017(127): 56-66.
- [3] Yan, J. G. Complete convergence and complete moment convergence for maximal weighted sums of extended negatively dependent random variables[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2018, 34 (10): 1501-1516.
- [4] Louhichi, S., and P. Soulier. Marcinkiewicz-Zygmund strong laws for infinite variance time Series[J]. Statistical Inference for

- Stochastic Processes, 2018, 3 (1/2), 31-40.
- [5] Xu, Mingzhou. On the complete moment convergence of moving average processes generated by negatively dependent random variables under sub-linear expectations[J]. Aims Mathematics, 2024, 9(2): 3369-3385.
- [6] Zhang, Y., Ding, X. Further research on complete moment convergence for moving average process of a class of random variables[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2017, 1-46
- [7] Resnick, S.I., & Willekens, E. Moving averages with random coefficients and random coefficient autoregressive models. Communications in Statistics. Stochastic Models, 1991, 7(4), 511-525.
- [8] Wu Y., Wang W., Wang X. Convergence of the CUSUM estimation for a mean shift in linear processes with random coefficients[J]. Computational statistics, 2024(7):39.
- [9] Hosseini S. M., Nezakati A. Convergence rates in the law of large numbers for END linear processes with random coefficients[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2020, 49(1): 88-98.
- [10] Wang, K. Y., Y. B. Wang, Q. W. Gao. Uniform asymptotics for the finite-time ruin probability of a new dependent risk model with a constant interest rate[J]. Methodol Comput Appl Probab, 2013, 15: 109-204.
- [11] Liu, L. Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails[J]. Statist. Probab. Lett., 2009, 79: 1290-1298.
- [12] Lehmann E. L. Some concepts of dependence[J]. Ann. Math. Statist., 1966, 37: 1137-1153.
- [13] Wang, X. J., Y. Wu, Rosalsky A. Complete convergence for arrays of rowwise widely orthant dependent random variables and its applications[J]. Stochastics, 2017, 89: 1228-1252.
- [14] Wu, Y., X. J. Wang, T. C. Hu. Limiting behaviour for arrays of rowwise widely orthant dependent random variables under conditions of R-h-integrability and its applications[J]. Stochastics, 2019, 1: 1-30.
- [15] Yao, C., H. Y. P., Wang, R., Wang, X. J. Laws of large numbers and complete convergence for WOD random variables and their applications[J]. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 2023, 52(1), 175-195.
- [16] Lang, J. J., He, T. Y., Yu, Z. Q., Wu, Y.,

- Wang, X. J. Complete convergence for randomly weighted sums of random variables and its application in linear-time-invariant systems. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 2023, 52(3), 868-883.
- [17] Chen, P. Y., Sung, S.H. Complete convergence for weighted sums of widely orthant-dependent random variables. *Journal of Inequalities and Applications*[J], 2021, 45, 1-16.
- [18] Shen, A.T., Li, X., Ning, M.M. Strong convergence properties for weighted sums of WNOD random variables and its applications in nonparametric regression models. *Stochastics*, 2021, 93(3): 376-401.
- [19] Ding, L., Jiang, C. Strong convergence for weighted sums of WOD random variables and its application in the EV regression model[J], *Applications of Mathematics*, 2024, 69, 93-111.
- [20] Andre A, Andrew R, Taylor R L. Strong laws of large numbers for weighted sums of random elements in normed linear spaces[J]. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1989, 12(3), 507-520.
- [21] Wang, X. J., Xu, C., Hu, T. C., Volodin A, Hu, S. H. On complete convergence for widely orthant dependent random variables and its applications in nonparametric regression models. [J] *Test*, 2014, 23: 607-629.